Transformée de Fourier d'une Gaussienne

Référence : Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, Mohammed El Amari. p.156

Théorème :
Soit a un réel, $a > 0$. Alors, $\forall \xi \in \mathbb{R}$:

$$\mathscr{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(\frac{-\xi^2}{4a})$$

Preuve :

Posons γ_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\gamma_a(x) = e^{-ax^2}$.
Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a :

$$\hat{\gamma}_a(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2 - ix\xi}\, dx$$

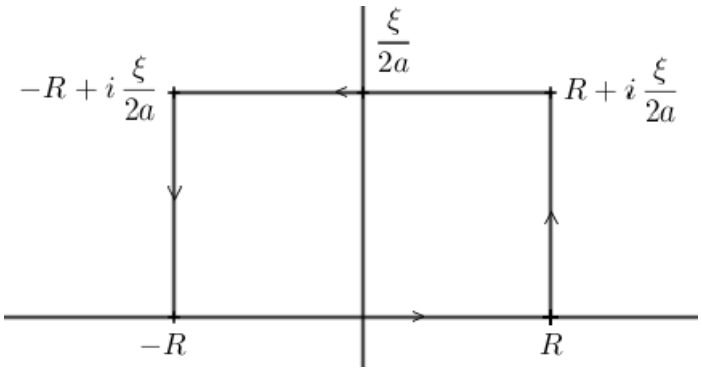
On écrit :

$$ax^2 + ix\xi = a(x^2 + ix\frac{\xi}{a}) = a((x + i\frac{\xi}{2a})^2 + \frac{\xi^2}{4a^2})$$

On a alors :

$$\hat{\gamma}_a(\xi) = e^{\frac{-\xi^2}{4a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x+i\frac{\xi}{2a})^2}\, dx$$

Considérons la fonction de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{-az^2}$. Pour $R > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, notons $\Gamma(R)$ le contour suivant :



On a :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma(R)} e^{-az^2} dz &= \int_{-R}^{R} e^{-ax^2} dx + i\int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(R+it)^2} dt - \int_{-R}^{R} e^{-a(x+i\frac{\xi}{2a})^2} dx - i\int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(-R+it)^2} dt \\ &= I_1(R) + I_2(R) - I_3(R) - I_4(R)\end{aligned}$$

Pour $I_1(R)$:

On sait que $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

En faisant le changement de variable $u = \sqrt{a}x$ dans $I_1(R)$, on obtient que $\lim_{R \to +\infty} I_1(R) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Pour $I_2(R)$:

On a $|I_2(R)| \leq \int_0^{\frac{\xi}{2a}} |e^{-a(R+it)^2}| dt = \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(R^2-t^2)} dt$ [1]
De plus,
$\int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(R^2-t^2)} dt = e^{-aR^2} \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{at^2} dt \to 0$ quand $R \to +\infty$.

Pour $I_4(R)$:

De la même manière que pour $I_2(R)$ on trouve que $|I_4(R)| \to 0$ quand $R \to +\infty$.

Pour $I_3(R)$:

Il nous reste à étudier $\int_{-R}^{R} e^{-a(x+i\frac{\xi}{2a})^2} dx$. L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+i\frac{\xi}{2a})^2} dx$ converge absolument. On a donc :
$\lim_{R\to+\infty} I_3(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+i\frac{\xi}{2a})^2} dx = e^{\frac{\xi^2}{4a}} \hat{\gamma}_a(\xi)$
La fonction $z \mapsto e^{az^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et le contour $\Gamma(R)$ est fermé donc le théorème de Cauchy implique :

$$\int_{\gamma(R)} e^{az^2} = 0$$

On obtient en passant à la limite quand $R \to +\infty$ que

$$0 = \sqrt{\frac{\pi}{a}} + 0 - e^{\frac{\xi^2}{4a}} \hat{\gamma}_a(\xi) - 0$$

Finalement : $\boxed{\hat{\gamma}_a(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{-\xi^2}{4a}}}$

*Recasage :*250, 236, 245, 239

1. On a $|e^{-a(R+it)^2}| = |e^{-a(R^2-2iRt-t^2)}| = |e^{-a(R^2-t^2)}|.|e^{2iaRt}| = e^{-a(R^2-t^2)}$